Thünen-Archiv

Entwürfe zum Isolierten Staat I.

6. Über die mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe.[1]

[1] Dies erste Blatt ist das Aktendecklatt. Es gelten auch für dieses Manuskript die bereits bekannten Regeln: in {geschweifte} Klammern wurden Bleistiftzusätze gesetzt, in [eckige] Klammern unsichere Angaben.

{E XVI}
{Seiten 612-660}

6.

Über die mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe.[2]

[2] Dies ist ein weiteres Deckblatt, ein gefaltetes A3-Blatt, in welches das Manuskript eingelegt wurde.

Zweite Methode

Aufgabe.

Die Gleichung für die krumme Linie
D F E zu finden

Wenn AC = CD = r
CP = x
PF = $\sqrt{(r^2 + x^2)}$ = y

so ist CR = PF = y = $\sqrt{(r^2 + x^2)}$
RF = CP = x

$CR^2 = PF^2 = y^2 ==== r^2 + x^2 = CD^2 + RF^2$
also $FR^2 == CR^2 \cancel{F^2}^{?} CD^2$
Setzt man hier FR = Z
CD = 1/2 a
CR = u
so ist $Z^2 = u^2 - 1/4a^2$

Die s ist aber die Gleichung für die gleichseitig Hyperbel wo große u kleine Axe gleich a ist, die Abscisse u vom Mittelpunkt C angerechnet werden, und Z die Ordinale ist.
(Vergleiche Kästners Analysis endl. Größen §402)

Unsere Aufgabe, die Summe aller Entfernungen vom Punkt C nach jedem Punkt der Linie CB zu finden, ist also gelöst, wenn wir den Inhalt der Hyperbel DFEG von dem Inhalt des Rechtecks CBEG abziehen.

{614}

Aufgabe. Der Inhalt der Figur DELJ zwischen der Hyperbel und ihrer Asymtote zu finden

Setzen wir CJ = JD = t = r $\sqrt{1/2}$

JL == p = ~~$1/2\,a\sqrt{1/2}$~~

EL == q

[3]so ist (Köstners Anal. Endl Größen § 412)
für die gleichseitig Hyperbel
CL + EL = JD²
also (t+p)q = t² = 1/2 r² = 1/8 a²,
und q = $\frac{t^2}{t+p}$
Das Element der DELJ ist qdp
= $\frac{t^2 dp}{t+p}$. Nun ist $\frac{dp}{t+p} = d\lg(t+p)$
also $ht^2 \frac{dp}{t+p} = t^2 \lg(t+p)$ [x]

Aufgabe.
Den Inhalt des Ausschnitts zwischen der Hyperbel EFD, der halben Axe DC und der Linie CE – vom Mittelpunkt der Hyperbel bis an deren Umfang gezogen – zu finden.

Der Inhalt des Dreyecks CEL ist = 1/2 CL x EL = 1/2 (t+p)q. Nun ist aber (t+p)q = t² also Δ CEL = 1/2 t² = Δ DJC

Zieht man von beiden Dreyecken das Dreyeck CHJ ab, so bleibt Figur ELHJ = Δ DHC

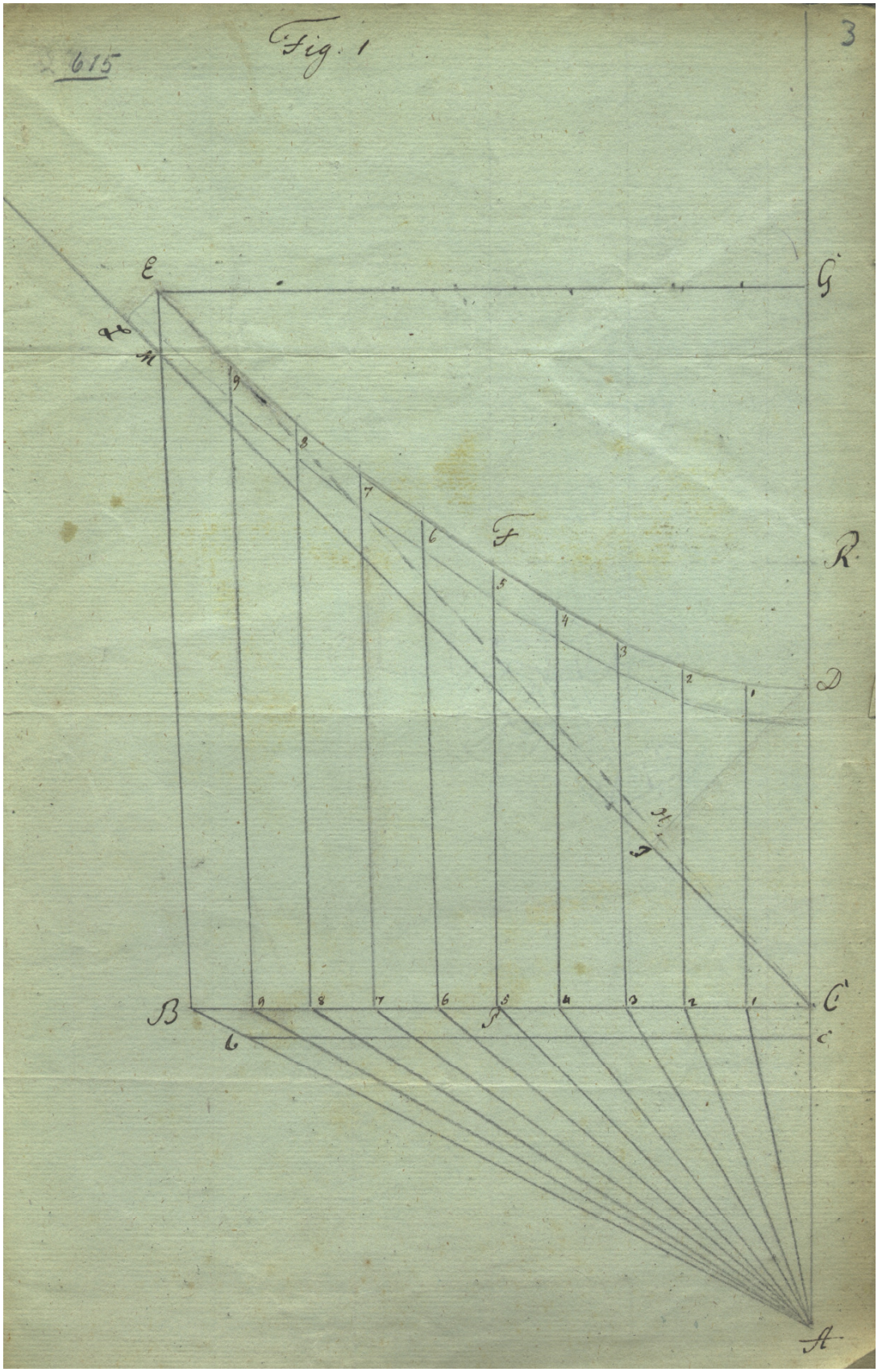
Fügt man zu beiden die Figur EHD hinzu[4]

---

[3] Randbemerkung Thünens auf Höhes dieses Abschnitts: "bleibt weg"

[x] Randbemerkung Thünens: Für p=0 ist der Inhalt der Figur = 0 also t²lgt+C = 0 und C = -t²lgt. Das vollständige Integral also t²lg(t+p)-t²lgt = t²lg $\frac{t+p}{t}$.
Hier ist t der Subtangente gleich; setzt man diese = 1 so ist der Inhalt der Figur = lg.nat (1+10).

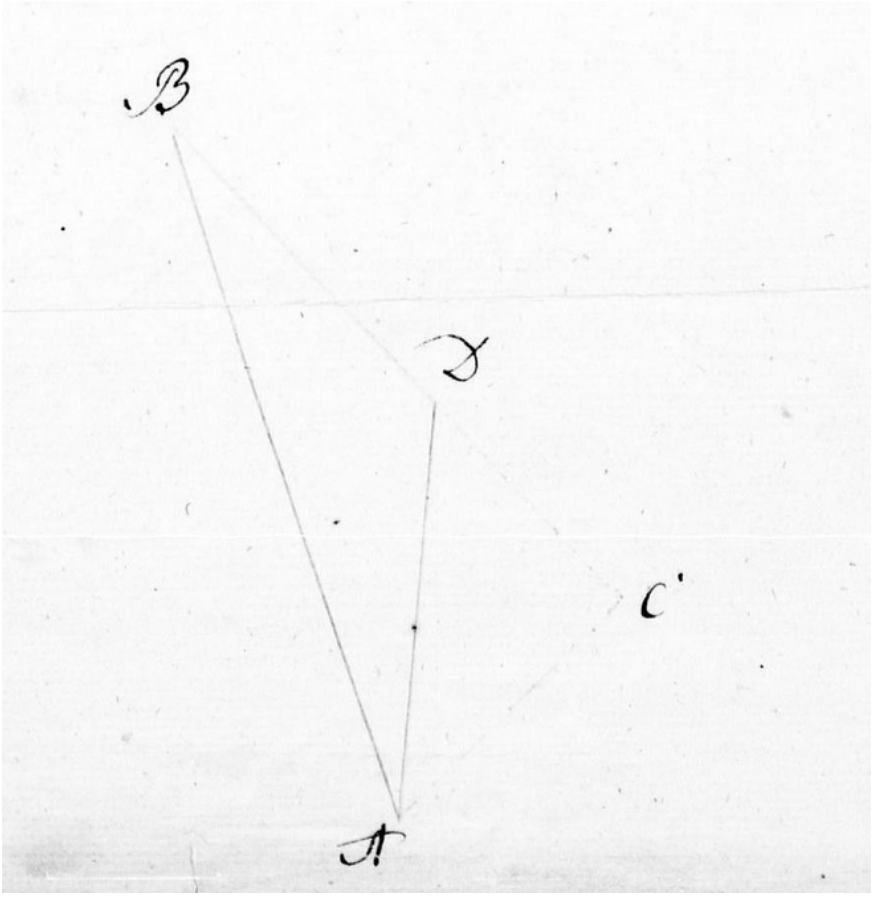
[4] An dieser Stelle ist die Bleistiftseitenzählung durcheinander geraten, denn es folgen Zeichnungen und weitere Formeln auf anderem Papier, die eigentliche Fortsetzung des letzten Satzes folgt erst auf der Seite {621} bzw. {7}. CW


615
Fig. 1
3
E
G
M
F
R
D
B
C
c
A

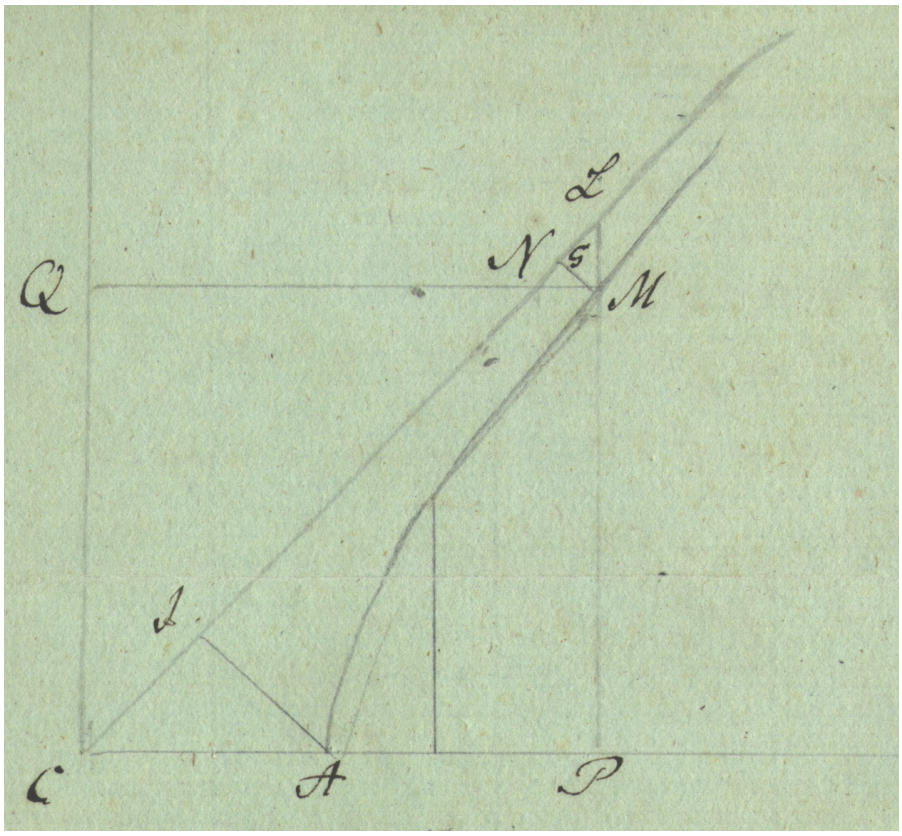
{616}

Fig 2

Fig. 3



3. Methode



Anmerk.
Diese 3. Methode ist die wodurch ich zuerst die Formel für die mittlere Entfernung gefunden habe.

Es sey AM eine gleichseitige Hyperbel
CNL die Assymptote
CP = u, CA = r; PM = CQ = y
so ist $y^2 = u^2 - r^2$
Nimmt man CQ zur Abscisse, so ist QM = CP = u
$CQ^2 = QM^2 - CA^2$
$Y^2 = u^2 - r^2$; also das Quadrat der
Ordniate QM oder $u^2 = y^2 + r^2$
Wenn LP=Z, PM=y, so ist $(Z-y)(Z+y) = r^2$
also LM = Z-y = $\frac{r^2}{z+y}$, bey der rechtwinklichten
Hyperbel ist aber LP = CP also Z = u
demnach LM = $\frac{r^2}{u+y}$, aber NM ist gleich LM
QN = CQ = y, u = QM = QN+NM = y + $\frac{r^2}{u+y}$

$$\frac{u^2+yu = yu+y^2+r^2}{u^2 \quad = y^2+r^2}$$

Hieraus geht also keine neue Gleichung hervor[5]

[5] Anmerkung von Thünen über den gesamten Blattrand: bleibt weg.

{618}

MG sey ein [Perpendikel] von dem Punkt M auf die Assymptote CL gefällt.
Es sey MG = q; CJ = a, JG = p
so ist (a+p)q = 1/2r² = a²
NG = MG = q; NM = q $\sqrt{2}$
CN ist aber auch = y $\sqrt{2}$; CG also = q+y $\sqrt{2}$
also CGxGM = (q+x $\sqrt{2}$)q = a²

$$q^2+yq\sqrt{2} = a^2$$

$$y = \frac{a^2-q^2}{q\sqrt{2}}$$

u = QM = QN+NM = y+q $\sqrt{2}$ = $\frac{a^2-q^2}{q\sqrt{2}}$ +q $\sqrt{2}$ = $\frac{a^2-q^2}{q\sqrt{2}}$

Der Inhalt der Figur ACQM ist h udy

y= $\frac{a^2q^{-1}-q}{\sqrt{2}}$; dy= $\frac{\left(-a^2q^{-2}-1\right)dq}{\sqrt{2}} = \frac{-\left(a^2-q^2\right)dq}{q\sqrt{2}}$

udy = $\frac{a^2+q^2}{q\sqrt{2}}x - \frac{\left(a^2+q^2\right)dq}{q^2\sqrt{2}} = \frac{-\left(a^4+2a^2q^2+a^4\right)dq}{2q^3}$

$= -1/2\left(a^4a^{-3}+2a^2q^{-1}+a\right)dq$

h udy = $-1/2\left(-1/2a^4q^{-2}+2a^2\lg q+1/2q^2\right)$

$= \frac{1}{4}\frac{a^4}{q^2} - 1/4q^2 - a^2\lg q = \frac{a^4-q^4}{4q^2} - a^2\lg q + C$

uy = $\frac{a^2-q^2}{q\sqrt{2}} \times \frac{a^2+q^2}{q\sqrt{2}} = \frac{a^4-q^4}{2q^2}$

h udy = 1/2 uy – a²lgq + C
h udy ist = 0 für y = 0
Ist in y = $\frac{a^2-q^2}{q\sqrt{2}}$, y=0, so ist $\frac{a^2-q^2}{q\sqrt{2}} = 0$

also q = a

Setzt man in $\frac{a^4-q^4}{q\sqrt{2}} - a^2\lg q + C = 0$, q=a

so ist –a²lgq + C = 0, also C = a²lga
Das vollständige Integral ist also

$$\frac{a^4-q^4}{4q^2} - a^2\lg q + a^2\lg a = \frac{a^4-q^4}{4q^2} + a^2\lg\frac{a}{q}$$

=1/2 uy + a²lg $\frac{a}{q}$ [6]

[6] Anmerkung von Thünen über den gesamten Blattrand: bleibt weg.

$y + q\sqrt{2} = u$; also $q = (u - y)\sqrt{1/2}$
a ist gleich $r\sqrt{1/2}$. Diese Werthe substituirt
gibt gleich $hu\partial y = 1/2uy + 1/2r^2 \lg\left(\frac{r}{u-y}\right)$
Für $y = r$ gibt dies, da als dem $u = y\sqrt{2}$ ist

$$hu\partial y = 1/2r^2\sqrt{2} + 1/2r^2 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = 1/2r^2\left(\sqrt{2} + \lg(\sqrt{2}+1\right)$$

Für $r = 1$
ist $hu\partial y = 1/2uy + 1/2 \lg\left(\frac{1}{u-y}\right) = 1/2uy - 1/2 \lg(u-y)$
oder wenn man $\sqrt{(1+y^2)}$ für u setzt

$$h\sqrt{(1+y^2)}\partial y = 1/2y\sqrt{(1+y^2)} - 1/2 \lg\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)$$

Um nun zu sehen, ob dieser Ausdruck wirklich
das Integral von $\sqrt{(1+y^2)dy}$ sey, differentiire
man den gefundenen Ausdruck. Dies gibt

$$1/2\partial y\left(\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}} + \sqrt{(1+y^2)} - \left(\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}} - 1\right)\right) : \sqrt{(1+y^2)} - y$$

$$= 1/2\partial y\left(\frac{y^2 + (1+y^2)}{\sqrt{(1+y^2)}} - \frac{y + \sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{(1+y^2)}\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)}\right)$$

$$= 1/2\partial y\left(2y^2\sqrt{(1+y^2)}\frac{+\sqrt{(1+y^2)}}{+\sqrt{(1+y^2)}} - 2y^3\frac{-y}{-y}\right) : \sqrt{(1+y^2)}\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)$$

$$= \partial y\frac{\left(\sqrt{(1+y^2)} + y^2\sqrt{(1+y^2)} - y\sqrt{(1+y^2)}\right)}{\sqrt{(1+y^2)}\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)}$$

$$= \partial y\frac{\sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{1+y^2}}\left(\frac{1 + y^2 - y\sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{(1+y^2)} - y}\right) = \sqrt{(1+y^2)}\partial y$$

also übereinstimmend.[7]

[7] Anmerkung von Thünen über den gesamten Blattrand: bleibt weg.

{620} Nach Ohms Integraltafeln

Tafel 21 n° 1 ist, wenn a = 1, b = 1 gesetzt wird

$$h\sqrt{(1+x^2)}\partial x = 1/2x\sqrt{(1+x^2)} + 1/2h\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Nach Tafel 19 n° 1 ist $\cancel{h\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\lg\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}}$

$$h\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \lg\left(\sqrt{(1+x^2)}+x\right)$$

Also ist $\cancel{= -\left(1/2\sqrt{-1}\right)\lg\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}}$

$$h\sqrt{(1+x^2)}\partial x = 1/2x\sqrt{(1+x^2)} + \lg\sqrt{(1+a^2)+x)}$$

$$\cancel{-1/2\left(1/2\sqrt{-1}\right)\lg\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}}$$

Wir haben dagegen gefunden

$$h\sqrt{(1+x^2)}\partial x = 1/2x\sqrt{(1+x^2)} - 1/2\lg\sqrt{(1+x^2)} - x$$

Es muß also $h\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} = -\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)$ seyn

Das Differential von $-\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)$

ist $\frac{-\left(\frac{x\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} - \partial x\right)}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)\partial x}{\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)\sqrt{(1+x^2)}}$

$= \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}$; welches also übereinstimmt

~~Das Integral von~~ $\cancel{\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}}$~~, welches nach Ohm nur~~

~~in unmöglichen Größen dargestellt werden kann~~
~~ist hier in vollen Größen gefunden.~~

Das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$ ist nach Ohm $= +\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}+x\right)$

Wir haben dasselbe gefunden $-\lg\left(\sqrt{1+x^2}\right)-x)$

Es muß also $-\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right) = +\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}+x\right)$ seyn und dies findet sich auch, wenn man beide Ausdrücke ~~integrirt~~ differentiert.[8]

[8] Anmerkung von Thünen über den gesamten Blattrand: bleibt weg.

so ist ELHJ + EHD das ist DELJ
= CDH + EHD das ist CDE
Das Stück DELJ zwischen Hyperbel und Asymtote hat also gleichen Inhalt mit dem Ausschnitt CDE.
Der Inhalt dieses Ausschnitts ist also $t^2 \lg(t+p)$

Zieht man von dem Dreyeck CEG den Inhalt des Ausschnitts CDE ab, so ergibt sich der Inhalt des Stücks der Hyperbel DFEG

Inhalt des Dreyecks CEG === 1/2 xy

des Ausschnitts CDE === $t^2 \lg\left(\frac{t+p}{t}\right)$

bleibt Inhalt der Hyperbel $1/2xy - t^2 \lg\left(\frac{t+p}{t}\right)$

Hier sind nun noch die Werthe von t und p in r, x u. y anzugeben und auszudrücken

Die Winkel LEM und EML sind, weil BCM=1/2R, auch jeder = 1/2 R
folglich ist LM = EL = q
Nun ist LC = LM + MC = $q+x\sqrt{2} = t+p$
EM ist = $q\sqrt{2}$, und EB = EM + MB = $q\sqrt{2} + x = y$
also $q = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$. Diesen Werth von q in $t+p=q+x\sqrt{2}$ gesetzt, gibt $\frac{y-x}{\sqrt{2}} + x\sqrt{2} = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$
t ist = $r\sqrt{1/2}$, t^2 also $1/2\, r^2$
Für t+p den Werth $\frac{y+x}{\sqrt{2}}$, und für $t^2 - 1/2\, r^2$ gesetzt
gibt den Inhalt der Hyperbel = $1/2xy - 1/2r^2 \lg\left(\frac{x+y}{r}\right)$

{622} Nach Kastners Analysis des Unendlichen § 320 III

ist der Inhalt der gleichseitigen Hyperbel

$= 1/2x_Z - 1/8a^2 \text{lgnat}\left(\frac{2x+2Z}{a}\right)$

wenn x die Abcisse vom Mittelpunkt aus

$Z = \sqrt{(a^2 - 1/4a^2)}$ die Ordinate und a die große Axe der Hyperbel bedeutet.

Wir haben die Abcisse = y, die Ordniate = x und die halbe Axe = r gesetzt.

Substituirt man diese Buchstaben, so wird die Kastnersche Formel in folgende verwandelt $1/2xy - 1/2r^2 \text{lgnat}\left(\frac{x+y}{r}\right)$

Dies stimmt also genau mit der oben gefundenen Formel überein.

Die Summe der Entfernungen ist gleich dem Rechteck CBEG=xy

minus dem Hyperbelstück DFEG= $-1/2xy + 1/2r^2 \text{lg}\frac{x+y}{r}$

Die Figur CBEFD gleich der

Summe der Entfernungen ist also = $1/2xy + 1/2r^2 \text{lg}\frac{x+y}{r}$

Dies ist genau dasselbe was wir nach der ersten Methode gefunden haben.

Setzt man für y den Werth $\sqrt{(x^2 + r^2)}$

So verwandelt sich $1/2xy + 1/2r^2 \text{lg nat}\left(\frac{x+y}{r}\right)$

in $1/2x\sqrt{(x^2 + r^2)} + 1/2r^2 \text{lg nat}\left(\frac{x+\sqrt{r^2+x^2}}{r}\right)$[9]

[9] Seitenbemerkung für das komplette Blatt: „bleibt weg“

Zweite Methode.

Aufgabe.

Die Gleichung für die krumme Linie DFE zu finden.

Wenn $AC = CD = r$
CP
$PF = \sqrt{(x^2 + r^2)} = y$
so ist $CR = PF = y = \sqrt{(x^2 + r^2)}$
$RF = CP = x^2$
$CR^2 = PF^2 = y^2 = r^2+x^2 = CD^2 + RF^2$
Also $FR^2 = CR^2 - CD^2$
Setzt man hier $FR = Z$
$CD = 1/2\ a$
$CR = u$
so ist $Z^2 = u^2 = 1/4a^2$
Dies ist aber die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel, wo große und kleine Axe gleich a ist, die [Abscissen] a vom Mittelpunkt C abgerechnet werden, und Z die Ordinate ist. (Vergleiche Kästners Analysis endl. Größen §402).

Diese Aufgabe, die Summe aller Entfernungen vom Punkt C nach jedem Punkt der Linie CB zu finden, ist also gelöst, wenn wir den Inhalt der Hyperbel DFEG von dem Inhalt des Rechtecks CBEG abziehen.

{624}

Aufgabe: Der Inhalt der Figur DELJ zwischen der Hyperbel und ihrer Asyntote zu finden.

Setzen wir $CJ = JD = t = r\sqrt{1/2}$
$JL = p$
$EL = q$

so ist (Kästners Anal. Endl. Größen §412) für die gleichseitige Hyperbel

$CL \times EL = JD^2$
also $(t+p)a = t^2 = 1/2\, r^2 = 1/8\, a^2$,
und $q = \frac{t^2}{t+p}$.

Das Element der DELJ ist qdp
$= \frac{t^2 dp}{t+p}$. Nun ist $\frac{dp}{t+p} = d \lg (t+p)$
also $h\frac{t^2 dp}{t+p} = t^2 \lg(t+p)$.
Für p=0 ist der Inhalt der Figur = 0
also $t^2 \lg t + C = 0$ und $= -t^2 \lg t$.
Das vollständige Integral also
$t^2 \lg(t+p) - t^2 \lg t = t^2 \lg\left(\frac{t+p}{t}\right)$.
Hier ist t der Subtangente gleich; jetzt wird diese = 1, so ist der Inhalt der Figur = lg. nat (1+p).
Der Inhalt des Dreiecks DJC ist $= \sqrt{2}t^2$.
Also ist der Inhalt der ganzen Figur
$CDELC = 1/2\, t^2 + t \lg\left(\frac{t+p}{t}\right) = t^2$
$\left(1/2 + \lg(\frac{t+p}{t}\right)$.

Aufgabe.

Der Inhalt des Ausschnittes zwischen der Hyperbel EFD, der halben Axe DC und <u>der</u>

der Linie CE – vom Mittelpunkt der Hyperbel bis an deren Anfang gezogen – zu finden.

Der Inhalt des Dreiecks CEL ist = $1/2CL \times EL = 1/2(t+p)q$. Nun ist aber $(t+p)q = t^2$ also $\Delta CEL = 1/2t^2 = \Delta DJC$.

Zieht man von beiden Dreiecken das Dreieck CHL ab, so bleibt Figur ELHF = Δ DHC

Fügt man zu beiden die Figur EHD hinzu, so ist ELHJ + EHD das ist DELJ = CDH + EHD. Das ist CDE.

Das Stück DELJ zwischen Hyperbel und Asymptote hat also gleichen Inhalt mit dem Ausschnitt CDE. Der Inhalt dieses Ausschnitts ist also $t^2 \lg(t+p)$.

Zieht man von dem Dreieck CEG den Inhalt des Ausschnitts CDE ab, so ergibt sich der Inhalt des Stücks der Hyperbel DFEG

Inhalt des Dreyecks $CEG = 1/2xy$

des Ausschnitts $CDE = t^2 \lg\left(\frac{t+p}{t}\right)$

bleibt der Inhalt der Hyperbel $1/2xy - t^2 \lg\left(\frac{t+p}{t}\right)$

Hier sind nun noch die Werthe von t und p in r, x u. y anzugeben und auszudrücken.

Die Winkel L E M und E M L sind, weil $BCM = 1/2R$, auch jeder = $1/2R$ folglich ist LM = EL = q.

Nun ist $LC = LM + MC = q + x1/2 = t + p$

EM ist $= q1/2$, und $EB = EM + MB = q1/2 + x = y$

also $q = \frac{y-x}{1/2}$. Dieser Werth von q in $t + p$ $= q + x1/2$ gesetzt, gibt $\frac{y-x}{1/2} + x1/2 = \frac{x+y}{1/2}$

t ist $= r\sqrt{1/2}$, t² also $1/2r^2$.

Für $t+p$ der Werth $\frac{x+y}{1/2}$, und für $t^2 = 1/2r^2$ gesetzt,

gibt den Inhalt der Hyperbel $= 1/2xy - 1/2r^2 \lg\left(\frac{x+y}{r}\right)$

Nach Kästners Analysis des Unendlichen § 320 III ist der Inhalt der gleichseitigen Hyperbel

$= 1/2xZ - 1/8a^2 \lg.nat\left(\frac{2x+2Z}{a}\right)$ wenn x die Abcisse vom Mittelpunkt aus, $Z = \sqrt{(x^2 - 1/4a^2)}$ die Ordinate und x die große Axe der Hyperbel bedeutet.

Wir haben die Abcisse = y, die Ordinate = x und die halbe Axe = r gesetzt.

Substituirt man diese Buchstaben, so wird die Kästnersche Formel in folgende verwandelt

$$1/2xy - 1/2r^2 \lg.nat\left(\frac{x+y}{r}\right).$$

Dies stimmt also genau mit der oben gefundenen Formel überein.

Die Summen der Entfernungen ist gleich dem Rechteck $CBEG = xy$ minus dem Hyperbelstück

$DFEG = -1/2xy + 1/2r^2 \lg \frac{x+y}{r}$.

Die Figur CBEFD gleich der Summe der Entfernungen ist also $= 1/2xy + 1/2r^2 \lg \frac{x+y}{r}$.

Dies ist genau dasselbe, was wir nach der ersten Methode gefunden haben.

Setzt man hier y den Werth $\sqrt{(x^2+r^2)}$ in

$$1/2x\sqrt{(r^2+x^2)} + 1/2r^2 \lg.nat\left(\frac{x+\sqrt{(r^2+x^2)}}{r}\right)$$

Die Auffindung der mittleren Entfernung

als Anhang zum 5. Kapitel
des isolirten Staats 2. Theil

{Eintwurf zu Is. St. II, 2, 433 ff} {5.} {Neue Seite} {11}

1. Methode.[10]

{628}

{Die Auffindung der mittleren Entfernung}

{1. Methode}

Es sei AM eine Hyperbel
CNL die Ass~~y~~mptote
CP = u, CA = r, PM = CQ = y
so ist $y^2 = u^2 - r^2$
Nimmt man CQ zur Absisse, so
ist QM = CP = u
$CQ^2 = QM^2 - CA^2$
$y^2 = u^2 - r^2$; also das Quadrat der
Ordinate QM oder $u^2 = y^2 + r^2$.

MG sei ein Perpendikel, von dem Punkt
M auf die Assymptote CL gefällt.
Es sei MG = q; CJ = a, JG = p so ist $(a+p)q = 1/2r^2 = a^2$

$NG = MG = q : NM = q\sqrt{2}$.

CN ist aber auch $= y\sqrt{2}$; CG also $= q + y\sqrt{2}$

also $CG \times GM = \left(q + y\sqrt{2}\right)q = a^2$

$$q^2 + yq\sqrt{2} = a^2$$

$$q = \frac{a^2 - q^2}{q\sqrt{2}}$$

$$a = QM = QN + NM = y + q\sqrt{2} = \frac{a^2 - q^2}{q\sqrt{2}} + q\sqrt{2}$$

$$\cancel{+ q\sqrt{2}} - = \frac{a^2 + q^2}{q\sqrt{2}}$$

<u>Der</u>

[10] Originalanmerkung Thünens: <u>Anmerk:</u> Diese erste Methode ist die, wodurch ich zuerst die Formel für die mittlere Entfernung gefunden habe.

{629}

Der Inhalt der Figur ACQM ist $hu\partial y$.

$$y = \frac{a^2 q^{-1} - q}{\sqrt{2}}; \partial y = \frac{\left(-a^2 y^{-2} - 1\right)\partial q}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{-\left(a^2 + q^2\right)\partial q}{q^2\sqrt{2}}$$

$$u\partial y = \frac{a^2 + q^2}{q\sqrt{2}} \times -\frac{\left(a^2 + q^2\right)}{q^2\sqrt{2}} dq = -\frac{\left(a^4 + 2a^2q^2 + q^4\right)dq}{2q^3}$$

$$= -1/2\left(a^4 q^{-3} + 2a^2 q^{-1} + q\right)dq$$

$$hu\partial y = -1/2\left(-1/2a^4 q^{-2} + 2a^2 \lg q + 1/2q^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{a^4}{q^2} - \frac{1}{4}q^2 - a^2 \lg q = \frac{a^4 - q^4}{4q^2} - a^2 \lg q + C$$

$$uy = \frac{a^2 - q^2}{q\sqrt{2}} \times \frac{a^2 + q^2}{q\sqrt{2}} = \frac{a^4 - q^4}{2q^2}$$

$$hu\partial y = 1/2uy - a^2 \lg q + C$$

$hu\partial y$ ist = 0 für y = 0

Ist nun $y = \frac{a^2 - q^2}{q\sqrt{2}}$, $y = 0$, so ist $\frac{a^2 - q^2}{q\sqrt{2}} = 0$

also q = a

Setzt man in $\frac{a^4 - q^4}{q\sqrt{2}} - {}^2\lg q + C = 0$, ~~für~~ q = a

so ist $-a^2 \lg a + C = 0$, also $C = a^2 \lg a$

Das vollständige Integral ist also

$$\frac{a^4 - q^4}{4q^2} - a^2 \lg q + a^2 \lg a = \frac{a^4 - q^4}{4q^2} + a^2 \lg \frac{a}{q} = 1/2uy + a^2 \lg \frac{a}{q}$$

$y + q\sqrt{2 = u}$, also $q = (u - y)\sqrt{1/2}$
a ist gleich $r\sqrt{1/2}$. Dies Werthe substituirt
gibt: $hu\partial y = 1/2uy + 1/2r^2 \lg\left(\frac{r}{u-y}\right)$.
Für y = r gibt dies, da als dann $u = q\sqrt{2}$ ist.

$$hu\partial y = 1/2r^2\sqrt{2} + 1/2r^2 \lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = 1/2r^2\left(\sqrt{2} + \lg(\sqrt{2}+1\right).$$

Für r = 1

ist $hu\partial y = 1/2uy + 1/2 \lg\left(\frac{1}{u-y}\right) = 1/2uy - 1/2 \lg(u-y)$

oder wenn man $\sqrt{(1+y^2)}$ für u setzt

$$h\sqrt{(1+y^2)}\partial y = 1/2y\sqrt{(1+y^2)} - 1/2 \lg\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)$$

Um nun zu sehen, ob dieser Ausdruck
wirklich das Integral von $\sqrt{(1+y^2)}\partial y$ sei,
differentiire man den gefundenen Ausdruck.
Dies gibt

$$1/2\partial y\left(\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}} + \sqrt{(1+y^2)} - \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - 1\right) : \sqrt{(1+y^2)} - y\right)$$

$$= 1/2\partial y\left(\frac{y^2 + (1+y^2)}{\sqrt{(1+y^2)}} - \frac{y + \sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{(1+y^2)}\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)}\right)$$

$$= \partial y\left(\frac{\sqrt{(1+y^2)} + y^2\sqrt{(1+y^2)} - y(1+y^2)}{\sqrt{(1+y^2)}\left(\sqrt{(1+y^2)} - y\right)}\right)$$

$$= \partial y\frac{\sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\left(1 + y^2 - y\sqrt{(1+y^2)}\right)}{\sqrt{(1+y^2)} - y} = \sqrt{(1+y^2)}\partial y$$

also übereinstimmend.

{631}

Nach Ohms Integraltafeln.
Tafel 21 No 1 ist, wenn a=1, b=1 gesetzt wird

$$h\sqrt{(1+x^2)}\partial x = 1/2x\sqrt{(1+x^2)} + 1/2h\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Nach Tafel 19 No 1 $h\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \lg\left(\sqrt{(1+x^2)}+x\right)$

also ist: $h\sqrt{(1+x^2)}\partial x = 1/2x\sqrt{(1+x^2)} + \lg\sqrt{(1+x^2)}+x)$.

Wir haben dagegen gefunden

$$h\sqrt{(1+x^2)}\partial y = 1/2x\sqrt{(1+x^2)} - 1/2\lg\sqrt{(1+x^2)}-x.$$

Es muß also $h\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} = -\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)$ sind.

Das Differential von $-\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)$

ist $-\frac{\left(\frac{x\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}-\partial x\right)}{\sqrt{(1+x^2)}-x} = \frac{\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)\partial x}{\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)\sqrt{(1+x^2)}}$

$= \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, welches also übereinstimmt.

Das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$ ist auch Ohm

$= +\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}+x\right)$

Wir haben dasselbe gefunden $= -\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)$

Es muß also $-\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right) = +\lg\left(\sqrt{(1+x^2)}+x\right)$ sein und dies findet sich auch, wenn man beide Ausdrücke differentiirt.

Anmerkung des Herausgebers. Ad pag. 3. vor 2. Aufgabe.

Der Verfasser hat zur Lösung der Aufgabe noch 2 andere Methoden angewandt, die wir, da sie weniger einfach sind als die mitgetheilten, nur andeuten wollen.

1. Bei der einen, durch welche der Verfasser zuerst die Formel für die mittlere Entfernung gefunden, ist er von der Voraussetzung ausgegangen, daß DFE (Fig. 1.) eine gleichseitig Hyperbel sei, hat dann von C aus die Asymptote CJML gezogen, auf welcher JD und LE perpendiculär stehen, für die Linie CG Gleichungen entwickelt, in denen sie einmal durch die Linien CD und GE = CB, das andere mal durch CJ und ML = LE ausgedrückt ist, und dann durch Integralrechnung den Inhalt der Figur CDEB berechnet.

2. Bei der andern hat sich die vom Verfasser für die krumme Linie DFE (Fig. 1.) gesuchte und gefundene Gleichung als die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel ergeben, und ist zur Lösung der Aufgabe der Weg gewählt: den Inhalt der Hyperbel DFEG von dem Inhalt des Rechtecks CBEG abzuziehen.

Der Verfasser hat nun erst den Inhalt der Figur DELG zwischen der Hyperbel und ihrer Asymptote durch Integralrechnung berechnet, darauf nachgewiesen, daß diese Figur DELG gleichen Inhalt hat mit dem Ausschnitt CDE, woraus

a der Inhalt der Hyperbel DFEG = Dreieck CEG ÷ Aus-

Ausschnitt CDE sich ergeben hat zu

$$= \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} r^2 \log\left(\frac{x+y}{r}\right)$$

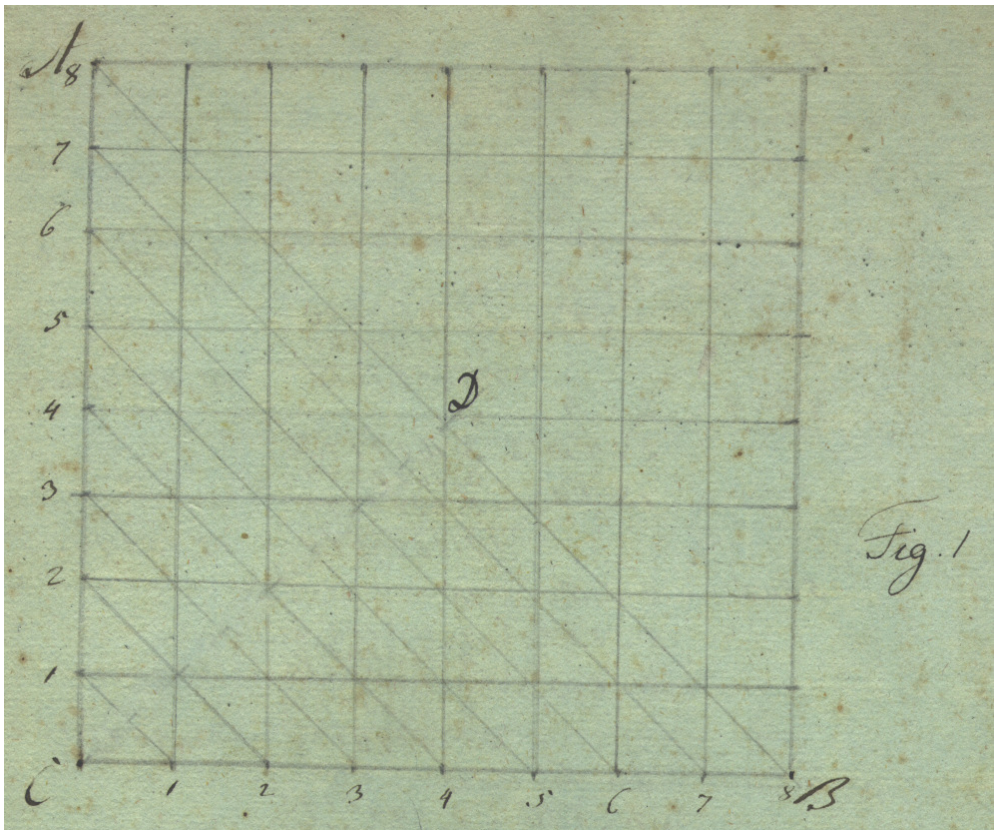
und

b weiter die Summe aller Entfernungen gleich dem Rechteck CBEG minus dem Hyperbelstück DFEG zu

$$= \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} r^2 \log\left(\frac{x+y}{r}\right),$$

übereinstimmend mit den oben mitgetheilten Berechnungen.

{634} §1 {14}



Aufgabe

In dem Dreyeck ACB die Entfernung
aller Durchschnittspuncte vom Mittelpunct C zu
finden.

Die mittlere Entfernung
durch Differenzenrechnung annähernd zu finden.

{635}

An Durchschnittspuncte sind vorhanden auf der Linie

	Entfernung von C
Von 1 bis 1 – 2 a 1 = 2	2,
2 bis 2 – 2 a 2 = 4	
1 a $\sqrt{2}$ = 1,4142136	
3 bis 3 – 2 a 3 – 6	5,4142136
2 a $\sqrt{5}$ á 2,2360680	
2,2360680	
10,4721360	10,4721360
4 bis 4 – 2 a 4 – 8	
2 a $\sqrt{10}$ á 3,1622777	
3,1622777	
1 a $\sqrt{8}$ – 2,8284271	
17,1529825	17,1529825
5 bis 5 2 a 5 – 10	
2 a $\sqrt{17}$ á 4,1231056	
4,1231056	
2 a $\sqrt{13}$ á 3,6055513	
3,6055513	
25,4573138	25,4573138
6 bis 6 2 a 6 – 12	
2 a $\sqrt{26}$ á 5,0990195	
5,0990195	
2 a $\sqrt{20}$ a 4,4721359	
4,4721359	
1 a $\sqrt{18}$ – 4,2426407	
35,3849515	35,3849515
7 bis 7 2 a 7 – 14	
2 a $\sqrt{37}$ á 6,0827625	
6,0827625	
2 a $\sqrt{29}$ á 5,3851648	
5,3851648	
2 a 5 – 10	
46,9358546	46,9358546
8 bis 8 – 2 a 8 – 16	
2 a $\sqrt{50}$ a 7,0710678	
7,0710678	
2 a $\sqrt{40}$ á 6,3245553	
6,3245553	
2 a $\sqrt{34}$ á 5,8309519	
5,8309519	
1 a $\sqrt{32}$ – 5,6568543	
60,1100043	60,1100043

{636} §3 {15}

Aufgabe

In dem Dreyeck ABC die Summe der Entfernung
aller Durchschnittspunkte vom Mittelpunkt C zu finden,
wenn die Grundlinie gleich der Höhe des Dreyecks
n Durchschnittspunkte enthält.

Nach §1 beträgt die Summe der Entfernungen					
von Durchschnitts punkten	auf den Linien	Summe	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz
3	2 – 2	5,4142136			
4	3 – 3	10,4721360	5,0579224		
5	4 – 4	17,1529825	6,6808465	1,6229241	
6	5 – 5	25,4573138	8,3043313	1,6234848	+ 0,0005607
7	6 – 6	35,3849515	9,9276377	1,6233064	÷ 0,0001784
8	7 – 7	46,9358546	11,5509031	1,6232654	÷ 0,0000410
9	8 – 8	60,1100043	13,1741497	1,6232466	÷ 0,0000188
10	9 – 9	74,9073914	14,7973871	1,6232374	÷ 0,0000092
11	10 – 10	91,3280118	16,4206204	1,6232333	÷ 0,0000041

Das 1. Glied oder die Entfernung von den beiden Durchschnittspunkten auf der Linie 1 – 1, ist hier weggelassen, weil die keine Irrationalzahl enthält, nicht demselben Gesetz wie die andern Glieder unterworfen ist, und deshalb Unregelmäßigkeit in die Differenzen gebracht hätte. Es muß aber nachher der ganzen Summe hinzugefügt werden.

Die ganze Summe der hier aufgeführten 9 Glieder
beträgt für 63 Durchschnittspunkte 367,1628595
Hinzu das 1. Glied – 2 Durchschnittspunkte 2
Ganze Summe 65 Durschnitsspunkte 369,1628595
Die Summe dividirt durch die Zahl der Durchschnittspunkte
gibt die mittlere Entfernung = 5,6794286

{637}

Die Betrachtung der Differenzen der obigen Reihe ergibt, daß die 2. Differenz zwar keine beständige Größe ist, daß aber die 3. Differenz mit jedem folgenden Gliede immer kleiner wird, und schon beym 9. Gliede ganz unbedeutend ist. Aus der regelmäßigen Abnahme der 3. Differenz, wo jedes folgende Glied nicht voll die Hälfte der vorhergehenden Gliedes ausmacht, läßt sich schließ die Gränze der Abnahme = Null ist.
Hieraus folgt dann, daß wenn m oder die Zahl der Glieder unendlich groß ist, die 2. Differenz eine beständige Größe ist. Dürfen wir aber die 2. Differenz als eine beständige Größe betrachten, so können wir auch durch die Differenzenrechnng die Summen für m Glieder finden.

Setzen wir nun mit Weglassung der letzten Decimalziffern
das erste Glied = 5,414 = a
die 1. Differenz = 5,085 = α
die 2. Differenz = 1,62323 = β
Nach §2 ist dann die Summe der Reihe

$$ma = 5{,}414m$$

$$\frac{m(m-1)}{2}\alpha = 2{,}5290m^2 \div 2{,}529m$$

$$\frac{m(m-1)m-2}{1.2.3}\beta = \underline{0{,}27054m^3 \div 0{,}8126m^2 + 0{,}541m}$$

$$\text{Summe } 0{,}27054m^3 + 1{,}7174m^2 + 3{,}426m$$

Probe.

Für m = 9 ist

0,27054m³	= 197,2236
1,7174m²	= 139,1094
3,426m	= 30,8340
Summe	367,1670

{638} {16}

Oben fanden wir durch specielle Berechnung
die Summe = 367,1628…
Das Ergebniß der allgemeinen Formel weicht hier
also nur unbedeutend ab.

Um nun die wirkliche Summe aller Entfernungen
zu finden muß das erste vorläufig weggelassene
Glied wieder hinzugefügt werden

Der vollständige Ausdruck für die Summe aller
Entfernungen ist dann:

$$0{,}27054m^3 + 1{,}7174m^2 + 3{,}426m + 2$$

Für m = 0 gibt die Formel die Summe =	2
m = 1	2+5,4139
m = 1 gibt die specielle Berechnung –	2 + 5,4142…
Abweichung	0,0003

Die Grundlinie des Dreyecks ACB enthält, mit
Ausnahme des Punkts C – n, oder – da m ein Glied
weniger enthält als n – m+1 Durchschnittspunkte.

Für	ist die Zahl der Durchschnittspunkte	
n=1	auf der Linie 1 – 1	=== 2
n=2	2 – 2	=== 3
n=3	3 – 3	=== 4
n=m+1		=== m+2

Das 1. Glied der Reihe für die Zahl der Durchschnittspunkte
ist = 2, das letzte = m+2, die Zahl der Glieder=m+1

Die Summe aller Durchschnittspunkte ist also $\frac{m+2+2}{2} \times (m+1)$

$$= \frac{(m+4)(m+1)}{2} = \frac{m^2 + 5m + 4}{2}$$

Setzt man n für m+1, so ist in n ausgedrückt
die Summe der Durchschnittspunkte $= \frac{n(n+3)}{2}$

{639}

Die Summe aller Entfernungen, dividirt durch die
Zahl der Durchschnittspunkte gibt die mittlere Entfernung.
Die mittlere Entfernung ist demnach

$$= \frac{0{,}27054m^3 + 1{,}7174m^2 + 3{,}426m + 2}{m^2 + 5m + 4} \times 2$$

Wenn m unendlich groß wird, so verschwinden in Zähler
und Nenner alle niedern Potenzen gegen die höhern, und
die mittlere Entfernung ist dann $= \frac{0{,}27054m^3}{m^2} \times 2 = 0{,}54108m$
In n ausgedrückt ist die mittlere Entfernung 0,54108 (n-1)
Da aber für n = ∞, n-1 = n ist, so ist die mittlere Entfernung auch =
0,54108n
Nun kann n, oder die Zahl der Dimensionendie die die
Grundlinie des Dreyecks ACB hat nicht blos dann,
= ∞ werden, wenn das Dreyeck unendlich groß ist,
sondern auch dann, wenn das Dreyeck endlich, die Einheit womit
die Grundlinien gemessen wird, unendlich klein ist.
Ursprünglich stellen hier die Durchschnittspunkte die
Mittelpunkte von Quadraten vor, deren Seiten gleich der
Einheit sind, womit die Grundlinie gemessen wird.
Denken wir uns nun, daß die Größe der Quadrate
unendlich abnimmt, so verwandeln sich <u>zuletzt</u> die Quadrate
in Punkte. Die Zahl der Durchschnittspunkte ist dann gleich
der Summe aller in dem Dreyeck entahltenen Punkte d.i.
gleich dem Inhalt des Dreyecks.
Die Summe aller Entfernungen = $0{,}27054n^3$
dividirt durch den Inhalt des Dreyecks = $\frac{n^2}{2}$
gibt die mittlere Entfernung = 0,54108n, wie oben.

{640} {17}

Aufgabe

Wenn man das Dreyeck ACB durch ein
Prependikel CD in zwey gleiche Hälften theilt,
die ~~Summe der~~ mittlere Entfernung aller Punkte des Dreyecks
CDB vom Scheitelpunkt C zu finden

In dem Dreyeck CDB sey die Grundlinie CD = a
so ist wenn CA = CB = n ist, $2a^2 = n^2$, $a = n\sqrt{1/2}$
und $n = a\sqrt{2}$.
In dem Dreyeck CAB beträgt die Summe der
Entfernungen $0{,}27054n^3$. In dem Dreyeck CDB
beträgt die Summe der Entfernungen also $1/2 \times 0{,}27054n^3 = 0{,}13527n^3$.
Da $n = a\sqrt{2}$ ist, so ist $n^3 = 2a^3 \times \sqrt{2}$; die Summe der Entfernungen also $= 0{,}27054a^3 \times \sqrt{2}$
Dies dividirt durch den Inhalt des Dreyecks $= 1/2a^2$
gibt die mittlere Entfernung $= 0{,}54108a \times \sqrt{2}$.
0,54108 multiplizirt mit $\sqrt{2} = 1{,}41421$ gibt
die mittlere Entfernung $= 0{,}7652007468a$

{641}

Durch die vorstehenden Berechnungen ist nun zwar die gestellte Aufgabe gelöst, aber die Lösung trägt den zwiefachen Mangel.

1. daß das Resultat der Rechnung nicht absolut wahr ist sondern sich nur der Wahrheit nähert, und man die Größe der Abweichung nicht erkennen kann; und

2. daß man hieraus die mittlere Entfernung für das rechtwinklichte aber nicht gleichschenkliche Dreyeck, noch weniger aber für das spitzwinklichte oder stumpfwinklichte Dreyeck finden kann, sondern für jeden solchen Fall die mühsame Rechnung von Neuem beginnen.

Wir können deshalb die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit: „für jedes Dreyeck die mittlere Entfernung zu bestimmen“ keineswegs für gelöst erklären – und werden dadurch aufgefordert, eine andre Methode zur Auffindung einen allgemein gültigen Formel zu versuchen.

{642} {19}

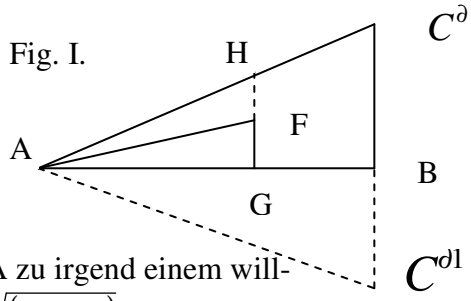
		1te Differenz	2t Differenz	
No 1	2,			
N 2	5,4142136	3,4142136	1,6437088	
N 3	10,4721360	5,0579224	1,6229241	
N 4	17,1529825	6,6808465	1,6234848	÷ 0,0001780
N 5	25,4573138	8,3043313	1,6233064	÷ 0,0000410
N 6	35,3849515	9,9276377	1,6232654	÷ 0,0000186
N 7	46,9358546	11,5509031	1,6232466	
N 8	60,1100043	13,1741497		

9 bis 9	$2\sqrt{65}$	8,0622577	
		8,0622577	
	$2\sqrt{53}$	7,2801099	
		7,2801099	
	$2\sqrt{45}$	6,7082039	
		6,7082039	
	$2\sqrt{41}$	6,4031242	
		6,4031242	
	2 . 9	18	
			74,9073914
10 – 10	$2\sqrt{82}$	9,0553851	
		9,0553851	
	$2\sqrt{68}$	8,2462112	
		8,2462112	
	$2\sqrt{58}$	7,6157731	
		7,6157731	
	$2\sqrt{52}$	7,2111026	
		7,2111026	
	$2\sqrt{50}$	7,0710678	
	2 x 10	20	
			91,3280118

Erster Fall {Seidl}

Wenn das Feld ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. I), der Winkel B ein rechter und die mittlere Entfernung von der Spitze A aus nach allen Punkten gesucht wird.

Fig. I.



Es sey AB = a
BC = b
AG = x
GF = y
AF = r und
die gesuchte mittlere Entfernung = B.
Es ist also die Entfernung vom Punkte A zu irgend einem willkürlichen Punkte der Fläche, $AF = r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, weil die Linie durch den Punkt F, HFG auf AB senkrecht ist.
Stellt man sich nun vor, daß das an der Linie HG liegende Element der Fläche von G bis H nach und nach befahren wird, so ist für dieses Element die Entfernung AG=x immer dieselbe, oder x ist für solches unveränderlich. Dagegen wächst y von Null bis y=GH, wo also y veränderlich ist. Nun ist nach bekannten Gründen der Integralrechnung der mittlere Werth von

$$y^2 = \frac{hy^2\partial y}{y} = \frac{y^2}{3} + C^{\partial}$$

wo h das Integralzeichen und C^{∂} die Constante (bedeutet) der Integration (-).
Für y = 0 ist das Integral = 0 also
$0 = 0 + C^{\partial}$, mithin auch $C^{\partial} = 0$

{644}

Für y = HG ist das Integral vollständig.
Man hat aber in den ähnlichen Dreiecken AbC und AGH

$$AB : BC^{\partial} = AG : GH$$

oder $a : b = x : y$

und hieraus $y = \frac{bx}{a}$. Setzt man diesen Werth für y in die obige Gleichung für r, so wird

$r^1 = \sqrt{\left(x^2 + \frac{bx^2}{3a^2}\right)} = x\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)}$ wo jetzt r^1 der mittlere Werth aller in der Linie GH liegenden Punkte vom Punkte A ist.

Wenn man nun die Summe aller Entfernungen mit der Summe aller Punkte dividirt: so erhält man die <u>mittlere</u> Entfernung B für das ganze Dreieck ABC.

Es ist aber aus Gründen der Integralrechnung die Summer aller Entfernungen $= hr^1 y\partial x$ und die Summe aller Punkte der Fläche oder die Fläche selbst $= hy\partial x$ also ist $B = \frac{hr^1 y\partial x}{hy\partial x} = \frac{hb}{a} x^2 \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)}$

$\cancel{h\frac{b}{a}x\partial x}$

$$= \frac{bx^3\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)}}{\frac{b}{2a}x^2} = \frac{2}{3}x\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)} + C^{\partial}$$

Für x = 0 ist das Integral = 0, also $C^{\partial} = 0$ und man hat

$$B = \frac{2}{3}a\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)} = \frac{2}{3}a\sqrt{\left(\frac{3a^2 + b^2}{3a^2}\right)} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)}$$

Die mittlere Entfernung wird also in dem gegebenen Falle erhalten wenn man zum Quadrate der Grundlinien, den dritten Theil des Quadrats der Höhe des Dreiecks addirt, aus dieser Summe die Quadratwurzel zieht und davon zwey Drittel nimmt.

Ist b = a so wird $B = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{4}{3}} = 0{,}7698a$ wofür man auch 0,77a nehmen kann

Beispiel I) Es sey $a = 6^{\partial}00°, b = 300°$, so ist

$$B = \frac{2}{3} \cdot 6^{\partial}00\sqrt{\left(1 + \frac{9}{3 \cdot 26^{\partial}}\right)} = 35^{\partial}2{,}77$$

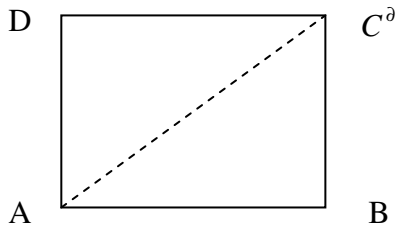
II. Ist a = 10°; b = 200° so ist $B = \frac{2}{3} \cdot 10 \sqrt{\left(1 + \frac{400}{3}\right)} = 77{,}268$

Man denke sich unter der Linie AB (Fig I) ein gleiches und ähnliches Dreieck, wie $ABC^{\partial I}$, so wird die mittlere Entfernung für solches dieselbe seyn und diese bleibt also auch für beyde Dreiecke dieselbe. Nun ist in diesem Falle für beyde Dreiecke, oder für das Dreieck $AC^{\partial}C^{\partial I}$ bekanntlich die Entfernung des Schwerpunkts $= \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} a$, und es ist also die mittlere Entfernung $B = \frac{2}{3} a \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)}$ immer größer, als jene. Im ersten Beispiel ist die Entfernung des Schwerpunktes $= 333\frac{1}{3}°$ und im zweiten $= 6\frac{2}{3}°$, und die gesuchte <u>mittlere</u> Entfernung ist im letzten Falle um fast 11 1/2 mal größer als jene des Schwerpunkts.

Zweiter Fall.

Wenn die Fläche ein Rechteck $ABC^{\partial}D$ (Fig II.) und der Anfangspunkt wie vorhin A ist

Fig II.



Man ziehe die Diagonale AC^{∂}, so erhält man zwei Dreiecke ABC^{∂} und ADC^{∂}.
Ferner hat man $AB = C^{\partial}D = a$
$BC^{\partial} = AD = b$ und man findet auf die vorige Art die mittlere Entfernung im Dreieck ABC^{∂}, $B^{1} = \frac{2}{3} a \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)}$ und jene im Dreieck ADC^{∂},

$B^{II} = \frac{2}{3} b \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{3b^2}\right)}$ und hieraus die mittlere Entfernung des ganzen Rechtecks

$$B = \frac{B^{1} + B^{II}}{2} = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)} + b\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{3b^2}\right)}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)} + \sqrt{\left(b^2 + \frac{a^2}{3}\right)}\right)$$

Ist b = a, so ist die Fläche ein Quadrat, und man hat $B = \frac{2}{3} a \sqrt{\frac{4}{3}} = 0{,}7698a$, wie oben beim Dreieck ABC^{∂}, was erforderlich ist.
Beispiel. Es sey a = 600°; b = 900° so ist

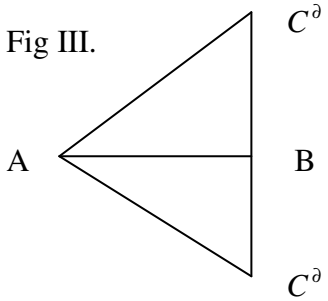
$$B = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\left(600^2 + \frac{900^2}{3}\right)} + \sqrt{\left(900^2 + \frac{600^2}{3}\right)}\right) = 188^{\partial}°{,}3.$$

Dritter Fall.

Wenn das Feld ein schiefwinkliches Dreieck $AC^{\partial}C^{\partial 1}$ (Fig III) und der Anfangspunkt A ist.

Man ziehe aus A eine senkrechte Linie AB auf die gegenüberstehende Seite $C^{\partial}C^{\partial 1}$, so erhält man zwey rechtwinkliche Dreiecke ABC^{∂} und $ABC^{\partial 1}$, welche auf die bereits gezeigte Art berechnet werden.

Fig III.

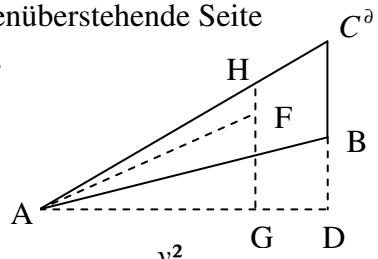


Vierter Fall.

Wenn bey einem schiefwinklichen Dreieck ABC^{∂} (Fig IV.) die Senkrechte AD auf die dem Punkte A gegenüberstehende Seite außer der Fläche des Dreiecks ABC^{∂} fällt.

Man verlängere die Seite $C^{\partial}B$ und ziehe die Senkrechte AD auf solche.

Es sey AD = a, $C^{\partial}B$ = b, BD = c^{∂}, AG = x, GF = y, AF = r, so ist wie beim



rechtwinklichen Dreieck, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ und $hy^2\partial y = \frac{y^2}{3}$.

Nun ist $y = \frac{c^{\partial}x}{a}$ das Integral = 0 und für $y = \left(\frac{b + c^{\partial}}{a}\right)x$ ist es vollständig, woraus man die mittlere Entfernung in der Linie

$$HG, r^1 = x\left(\frac{\sqrt{1} + 1/3\left(\frac{b + c^{\partial}}{3}\right)^3 - 1/3\frac{c^{\partial 3}}{a^3}}{\frac{b + c^{\partial}}{a} - \frac{c^{\partial}}{a}}\right) = x\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2} + \frac{bc^{\partial} + c^{\partial 2}}{a^2}\right)}$$

findet.

Und hieraus findet man ferner $\frac{hry\partial x}{hy\partial x} 2x\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2} + \frac{bc^{\partial}c^{\partial 2}}{a^2}\right)}$

~~Ist $b = c^{\partial}$~~ Für x = a ist die gesuchte mittlere Entfernung

$B = \frac{2}{3}a\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2} + \frac{bc^{\partial} + c^{\partial 2}}{a^2}\right)}$. Für $c^{\partial} = 0$ ist $B = \frac{2}{3}a\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{3a^2}\right)}$,

wie erforderlich ist.

~~Beispiel.~~ Ist $b = c^{\partial} = a$, so wird

$$B = \frac{2}{3}a\sqrt{\left(1 + \frac{1}{3} + 2\right)} = \frac{2}{3}a\sqrt{3{,}6^{\partial}} = 2{,}0367a.$$

Beispiel. Es sey $a = 120°, b = 100°, c^{\partial} = 60°$, so wird

$$B = 80 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{25^{\partial}}{108} + \frac{2}{3}\right)} = 110°,16.$$

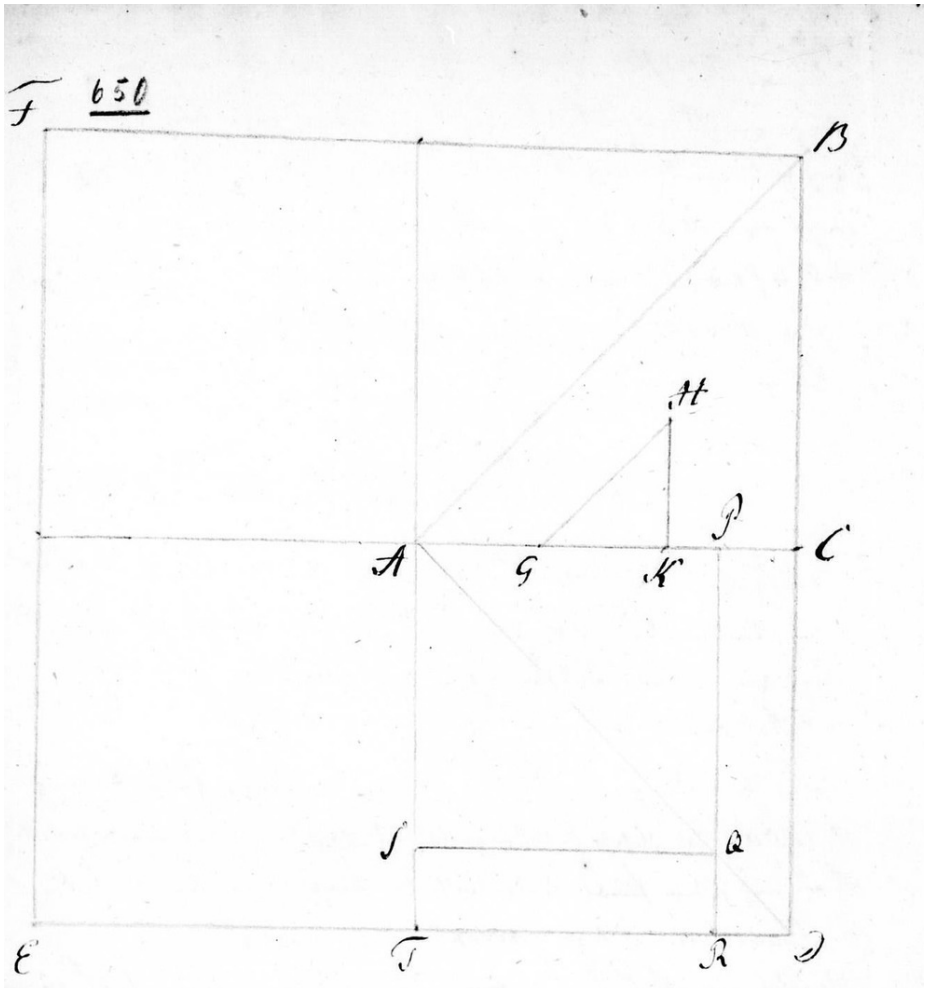
Da sich nun auf diese Art die mittlere Entferung in jedem Dreiecke finden und jedes regelmäßige oder unregelmäßige Vieleck in Dreiecke zerlegen läßt, so ist klar, daß man auf diese Art die mittlere Entfernung auch bey dem verschobenen Viereck bey einem Fünfeck und überhaupt bey jeder Fläche finden kann, welche von geraden Linien eingeschlossen ist.
Auf eine ähnlich Art findet man die mittlere Entfernung, wenn der Punkt A nicht in der Spitze eines Winkels, sondern irgendwo in einer Seite oder innerhalb der Fläche des Dreiecks oder der Figur des Feldes liegt.
Auch wenn der Punkt A, z. B. die Mergelgrube ganz außerhalb des Feldes in einer gegebenen Entfernung liegt läßt sich diese mittlere Entfernung finden, nur ist die Rechnung in diesem Falle etwas schwieriger.
Noch schwieriger wird sie wenn die Fläche ein Kreis oder ein Theil des Kreises ist, man mag den Punkt A im Mittelpunkte oder in der Peripherie des Kreises nehmen. Hier konnte ich die Integration bloß durch Reihen finden. Diese Fälle dürften jedoch bey der Landwirthschaft schwerlich vorkommen, und die Auflösung der hierher gehörigen Aufgaben, wo nämlich die Fläche von krummen Linien eingeschlossen ist, gehört mehr für Mathematiker als für Landwirthe.
Es würde mir sehr lieb seyn, wenn Herrn von Thünen die hier gegebene Auflösung seines Problems nicht unange-

nehm wäre, und ich wünsche hierüber seine Meinung entweder in den Mecklenburger oder in den Mögliner Annalen zu erfahren, weil dies zu anderweitigen interessanten, landwirthschaftlichen Erörterungen Gelegenheit geben würde. Daß die hier gegebene Auflösung richtig ist, davon kann man sich auch ohne Integralrechnung dadurch überzeugen, daß man z. B. die Grundlinie des rechtwinklichen Dreiecks in gleiche kleine Theile von z. B. einer Klafter eintheilt, darauf senkrechte Linien errichtet und auch diese in solche gleiche Theile theilt. Berechnet man nun alle diese Entfernungen von dem Punkte A nach dem bekannten Lehrsatz, daß die Hypothenusen gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate beider Katheten iat, so wird die Summe aller Entfernungen durch die Summe aller Punkte dividirt, sehr nahe die nach der obigen Formel gefundene mittlere Entfernung geben; nur ist letztere, wie leicht begreiflich ist, noch genauer. Sollte man auf die übrigen, hier nur angedeuteten Auflösungen dieser Aufgabe wünschen, so werde ich nicht unterlassen sie bekannt zu machen, da sie bereits seit längerer Zeit vollständig bearbeitet sind.

Ich schließe diesen kleinen Aufsatz in der angenehmen Hoffnun, daß die jungen Landwirthe Böhmens meinen wohlgemeinten Rath, ihre auf den Bildungsanstalten des Landes erlangten mathematischen Kenntnisse nicht zu vernachlässigen, beherzigen, und bald Beweise von der Befolgung derselben durch Anwendung der Mathematik auf landwirthschaftliche Gegenstände und durch Bekanntmachung derselben in dieser Zeitschrift, geben werden.

Prag, im December 1828.

Das Vorstehende ist ein Auszug aus einem
Aufsatz vom Wirthschaftsrath Seidl, Sekretär
der k.k. patriot. Ökon. Gesellschaft in Böhmen
Dieser Aufsatz ist enthalten in den
Oekonomischen Neuigkeiten Jahrgang 1829
Stück No 4.



In der Mitte eines Quadrates BDEF, wovon jede Seite 1000 Ruthen hätte, liege eine Stadt A Wie groß ist nun in dem Dreyeck ABC die mittlere Flächenentfernung von dem Punkt A?

Ist AC = BC = a = 500 Ruthen, so ist nach der Seidlerschen Formel die mittlere Entfernung

$$= 2/3\sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right)} = 2/3a\sqrt{\frac{4}{3}} = 0{,}77a$$, macht für

a = 500 – 385 Ruthen

Wenn nun aber alle Ackerstücke unter einen Winkel von 45° in der Richtung von GH ~~parallel~~ auf den Weg AC stoßen, so ist wie bey den Berechnungen über den Chausseebau erwiesen ist, H der Representant der mittleren Entfernung wenn AG = 1/3AC und GH = 1/3AB ist. Alsdann ist aber auch GK = 1/3 AC, also AK = 2/3a, HK = 1/3a und

$$AH = \sqrt{\left(\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2\right)} = 1/3a\sqrt{5} = 0{,}745a.$$

H ist aber zugleich der Schwerpunkt des Dreyecks ABC u die Entfernung des Schwerpunkts von A beträgt also 0,745a

{651}

Auf den Stadtfeldern kann man aber nicht in grader Richtung von H nach A kommen, sondern man muß von H nach G u von da nach A gehen. Der zurückgelegte Weg beträgt also

$HG + GA = 1/3AB + 1/3AC = 1/3\sqrt{2a^2} + 1/3a = 1/3a\left(1+\sqrt{2}\right) = 0{,}805a$ F

ür a = 500 macht dies 402,5 Ruthen

Es ist demnach die Entfernung des Schwerpunkts = 0,745a
die mittlere Entfernung = 0,770a
die mittlere Entfernung wenn alle Wege parallel mit der Hypothenuse laufen = 0,805a.

Aufgabe. Gesetzt nun es werde von dem Quadrat ACDT der Rand PCDTS abgeschnitten, wie groß ist für diesen Rand die mittlere Entfernung, wenn die Wege sämmtlich mit AD parallel laufen?

Für das Dreyeck ACD ist die mittlere Entfernung 0,805a; der Inhalt des Dreyecks ist $1/2a^2$. Will man nun von A aus nach jeder ~~Punkt~~ Quadratruthe des Dreyecks gehen, so beträgt die Summe aller Wege $0{,}805a \times 1/2a^2 = 0{,}402a^3$

Gesetzt nun AP sey = pa, so ist die mittlere Entfernung in dem Dreyeck APQ = 0,805pa, der Inhalt des Dreyecks = $1/2p^2a^2$, die Summe aller Entfernungen = $0{,}402p^3a^3$

Diese Summe von obiger für das Dreyeck ACD gefundenen, abgezogen, gibt die Summe aller Entfernungen in dem Abschnitt PCDQ = $0{,}402a^3 - 0{,}402p^3a^3 = 0{,}402a^3(1-p^3)$

Der Inhalt des Abschnitts ist $1/2a^2 \div 1/2a^2p^2 = 1/2a^2\left(1-p^2\right)$

Dividirt man mit dem Inhalt, so ergibt sich für den Abschnitt PCDQ die

mittlere Entfernung $= \dfrac{0{,}402a^3\left(1-p^3\right)}{1/2a^2\left(1-p^2\right)} = 0{,}805a\left(\dfrac{1-p^3}{1-p^2}\right)$

Gesetzt a sey = 500, pa = 400; p also = 4/5, so ist für den Abschnitt die mittlere Entfernung

$$= 402\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right) = 402\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{61:125}{9:25}\right) = 402\,\tfrac{1}{2}\times 1{,}355 = 454\,Ruthen$$

Anwendung der Differenzen-Rechnung
auf die Differential- und Integral-Rechnung.

Nach den in der Rechnung des Unendlichen angenommenen Grundsätzen verschwindet in dem Ausdruck $n(n-1) = n^2 - n$, wenn n unendlich groß wird, n gegen n² - und überhaupt jede niedere Potenz gegen die höhere – so daß für $n = \infty$ der Ausdruck $n^2 - n = n^2$ ist.
Nach diesem Grundsatz verschwinden in der oben für die Summe der Reihe a, b, c, d usw gefundenen Reihe alle vorhandenen Glieder gegen das letzte Glied, d. i gegen dasjenige Glied in welchem die Differenz eine beständige Größe ist.
Unter dieser Bedingung ist also die Summe

der Quadratzahlen, bey welcher die 2. Differenz beständig und gleich 2 ist $= \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 2 = \frac{n^3}{3}$

Kubiczahlen 3. $6 - \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times 6 = \frac{n^4}{4}$

Biquadratzahlen 4. $24 - \frac{n^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times 24 = \frac{n^5}{5}$

Nach Kästners Analysis der Endlichen 3. Auflage S. 32 hat die Reihe der natürlichen Zahlen, deren jede zur m. Potenz erhoben wird, m Differenzen, wovon die letzte beständig und gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 .....(m-1)m$ ist.
Setzt man nun hiernach in die oben angegebene summierende
Reihe $1 \cdot 2^m \cdot 3^m \cdot 4^m .....n^m$
statt $a \cdot b \cdot c \cdot \partial .....n^1 ge$
so erhält man, mit Differenz der Glieder in denen n in einer niedern Potenz vorkommt

$$S = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.....m(m+1)} \times 1 \cdot 2 \cdot 3....m$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).....(n-m)}{m+1}$$; oder da für

$n = \infty$ – $n(n-1)(n-2).....(n-m) = n^{m+1}$ ist,

$$S = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

{653}

Das letzte Glied Z oder das n^te der Reihe a, b, c usw ist für

$a = 1, b = 2^m, c = 3^m$ usw

$$= 1 + (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\beta ..... + \frac{(n-1)(n-2).....(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3.....m} \times 1 \cdot 2 \cdot 3.....m$$

welches, wenn für $n = \infty$ alle vorhergehenden Glieder weggelassen werden

$\frac{(n-1)(n-2).....(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3.....m} \times 1 \cdot 2 \cdot 3.....m = n^m$ beträgt

Vergleichen wir nun

das letzte Glied $\frac{(n-1)(n-2).....(n-m)}{1 \cdot 2.....m} \times 1 \cdot 2.....m = n^m$

mit der Summe $\frac{n(n-2).....(n-m)}{1 \cdot 2.....m(m+1)} \times 1 \cdot 2.....m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$

so finden wir, daß aus dem letzten Gliede die Summe gefunden wird, wenn man den Exponenten des letzten Gliedes um 1 erhöht, und dann mit dem erhöhten Exponenten dividirt.

Bemerkenswert ist es, daß man dasselbe Verfahren beym Integriren beobachtet.

Wir sind hier der in der Rechnung des Unendlichen herrschenden Ansicht gefolgt, nach welcher $(n-1)(n-2) = n^2$ ist, $(n-1)(n-2)(n-3) = n^3$ usw, sobald n unendlich groß angenommen wird. Daß aber eine ungenaue Rechnung zu absolut richtigen Resultaten führen soll scheint mit dem gesunden Menschenverstand in Widerspruch zu stehen. Auch ist mir nicht bekannt, daß man eine irgend befriedigende Erklärung, wie dies Verfahren zu richtigen Resultaten führen könne, gegeben hat. Seine einzige Begründung scheint es darin zu haben, daß von den auf diese Weise erhaltenen Resultaten, mehrere auch durch die Elementargeometrie gefunden u erwiesen, und also mit schon erwiesenen Sätzen im Einklang sind. Nichts desto weniger bleibt es ein Bedürfniß des Verstandes sich der Gründe des Verfahrens bewußt zu werden.

In der Reihe der Quadratzahlen ist das n. Glied = n².
Nach der allgemeinen Formel für die Reihe a, b, c, usw ist
das n. Glied $= a + (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\beta$
für alle Reihen deren 2. Differenz beständig ist. Da nun
bey den Quadratzahlen auch die 2. Differenz beständig ist: so
muß dieser Ausdruck ebenfalls = n² seyn.
Da ß hier = 2 ist: so ist das letzte Glied der Formel
$= (n-1)(n-2)$; welches für $n = \infty$ nach den Grundsätzen
der Anal. d Unendl. Ebenfalls = n² ist, und da nach eben
diesen Grundsätzen alle Glieder worin n in einer niedern
Potenz vorkommt, verschieden: so findet hier völlige
Uebereinstimmung statt.
Entwickeln wir dagegen die Glieder der Reihe wodurch
n² ausgedrückt ist: so erhalten wir – da a = 1, α = 3 u ß = ist –
folgendes:

$$\begin{array}{lcr} \frac{(n-1)n-2}{1 \cdot 2}(\beta = 2) & = & n^2 - 3n + 2 \\ (n-1)\alpha & = & +3n - 3 \\ \text{a} & = & +1 \\ \hline & \text{Summe } n^2 & \end{array}$$

Es zeigt sich hier also, daß $(n-1)(n-2)$ grade um
so viel kleiner ist, als n², als der Betrag der vorherge-
henden Glieder ausmacht.
Dasselbe gilt von allen Potenzenreihen z. B. für die
zur m. Potenz erhobenen Reihe der natürlichen Zahlen.
Das n. Glied derselben ist

$$a + (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\beta .... + \frac{(n-1)(n-2).....(n-m)}{1 \cdot 2.....m} \times 1 \cdot 2.....m$$

läßt man nun in dem letzten Glied dieser Reihe die Zahlen
welche von n abgezogen werden sollen weg: so ist dasselbe $= n^m$.
Da nun das n. Glied der zur m. Potenz erhobenen Reihe der
natürlichen Zahlen unbestreitbar $= n^m$ ist: so folgt hieraus
daß bey den Potenzreihen <u>das Weglassen der von n abzuziehenden
Zahlen genau durch das Weglassen der vorangehenden Glieder
kompensirt wird.</u>[11]

[11] Die folgenden Blätter dienten Thünen anscheinend lediglich als Kladde. Da auch angesichts der Zahlenreihen eine Transkription nicht sinnvoll schien, wurde das bediseitig beschriebene Blatt als Scan eingefügt. CW

Die Formel für die Summe aller Entfernungen

$$1/2xy + 1/2r^2 \lg\left(\frac{x + \sqrt{(r^2 + x^2)}}{r}\right)$$

reducirt sich hier das rechtwinklichte gleichschenklichte Dreyeck, wenn r, u also auch x = 1, y aber = $\sqrt{(r^2 + x^2)} = \sqrt{2}$ gesetzt wird, in folgende:

$$1/2\sqrt{2} + 1/2 \log.nat.(1 + \sqrt{2})$$

$1+\sqrt{2}$	ist gleich	2,4142136
log. brigg. 2,4143 =		0,382.7912
log. brigg. 2,4142 =		0,382.7732
Differenz 0,0001		0,0000180
Dies gibt für 0,0000136		0,0000024
lg brigg. 2,4142136 also =		0,3827756
Diese multiplicirt mit		2,3025851 um die Briggschen
		3827756 Logarithmen in natürliche
		19138780 zu verwandeln
		30622048
		19138780
		7655512
		114832680
		7655512
$\lg.nat(\sqrt{2}+1) =$		0,88137339320356
$\sqrt{2}$	=	1,41421356590086
	2/	2,29558695910442
		1,14779347955221

= der Summe der Entfernungen für das rechtwinklichte gleichschenklichte Dreyeck, dessen Grundlinie und dessen Höhe = 1 ist.